大家好，欢迎收看线性代数习题课。
今天这节课我们将着重练习如何在考试中求解试题。
你也许有如下体会：在你做作业习题的时候，
你可以对每道题甚至每一个步骤进行非常仔细的思考。
你还可以用不同的方法求解同一道题。
这样一方面你可以验证你的答案，另外你也可以找到最佳解法。
但是这些在考试中通常是不可行的。因为时间通常很紧迫，那么我们需要练习的
就是在考试中快速并准确求解习题的方法。下面我们来看这道题:
这道题出自一个线性代数50分钟的考试。
目前为止你已经学了足够的知识来求解这道题，
既然这是一个50分钟的考试，那么花在这道
题上的时间比较合理的应该是不超过15分钟。
也就是说在15分钟之内，你应该完成读题，
理解题意，并且完全求解这三个部分。
现在请你暂停这个视频，并尝试独立求解，然后你可以计时15分钟，
15分钟之后，我将回来并一起检验你的答案。
同时如果你提前完成的话，也请独立检查你的答案。
因为在考试中你应该尽量得到所有应得的分数。好，一会儿见。你完成了吗?
下面我们来一起解决这道问题。你可以看出这道问题是关于
矩阵行列式定义公式的练习题。
我们有一个4乘4的矩阵，那么第一个问题就是要计算这个矩阵A的行列式。
只使用行列式的定义式来计算。好，我们可以写出，矩阵A也就是第一部分，
矩阵A的行列式等于一些乘积的求和，这些元素
取自A的不同行，也就是说我们在每一行中取A的一个元素
并且保证它们的列指标都完全不同，也就是说
这些α，β，γ，和δ是相应的列指标。我把它记在这里，
我们需要这些成为数字1，2，3，4的一个置换，
那么如果你按照这个顺序求解的话，
从第一行逐行向下找到所有可能的1，2，3，4的置换
最后再去掉等于0的那些项的话，有多少项你需要计算呢?
你需要计算4的阶乘那么多项，也就是24项。
这样的话在考试中就比较花时间，其实有一种更快的方法来找
到这个求和式中的非0项。
既然要找非0项的话，我们来观察矩阵A中的0元素在哪里。
你可以看到矩阵A的0元素，出现在这四个位置，它们分别在第三行和第四行
也就是说在你写出那个公式的时候，A3γ和A4δ，只有可能在这四个数字中选取，
也就是我所画的这个红方块中选取，也就是说A3γ和A4δ
只可以是9，12，或者是10和11，如果是这样情况的话，

我们又需要这些元素都从不同的列中选取,
也就是说明你在第一行和第二行选取的元素，必须是这四个数字。

第一行和第二行只可以从上面这个红方块中选取，也就是说$A1\alpha$，$A2\beta$,
要么是1，6，要么是2和5，你可以看到其实我们可以忽略这个位置的四个
数字。因为无论选取哪一个数字的话
我们将不可避免的在第三行或第四行中选到至少一个0元素。
好，下面我们可以看到 经过这样简化的话，这个式子中还有多少项非0呢?
这里有两种取法，这里又有两种取法，那么最后也就是说非0项，只有四项,
我们把它依次写出，在第一个方块中，我可以选取1乘以6,
第二个方块中我选9和12，乘以9,
乘以12，那么这一项相应的列指标就是，因为它们均为对角线上元素,
也就是A11,A22,A33,A44, 这就是第一项，那么这是1，2，3，4的一个
正序排列。所以这一项的符号就是一个正号。
好看下一项，下一项在第一个方块中我还选取1和6,
在第二个方块中我选取10和11 如果我这样选的话，列指标就将成为A11，A22
10是A的第三行第四列的元素，也就是说这里的列指标应是A34,
11是第四行第三列中的元素，所以最后应是3。这是这项相应的列指标,
但是你可以看到我们需要对最后两个位置进行对换，才可以使这个置换回到1，2
，3，4 也就是说这一项前应该有一个负号。好，我们在这里继续，下一项
我们在第一个方块中选取2和5，那么在第二个方块中仍然选取9和12,
这一项的列指标将是2 是A中第一行第二列元素，所以是A12,
5是第二行第一个元素，A21, 那么下面还是对角线上A33,A44,
同样对于这个置换我们需要 对换这两个位置使得这个置换回到1，2，3，4
也就是说这项前面也应该还有一个负号，所以把一个负号加在这里。
那么最后一个就是 2，5，10和11，同理 这一项的列指标将是2，1，4，3,
那么这一次我们需要对这两个位置进行对换,
并且这两个位置进行对换，才可以回到1，2，3，4，那么两次对换使得
这一项的符号为正。好，这就是 行列式A中不为0的四项。
那么你对这四项进行求和的话，正确答案应该等于8。你的答案正确吗?
在考试中时间通常非常紧迫，那么完成第一部分后我们将立即
来进行对第二部分的求解。第二 部分是要求你计算矩阵A的第一行的代数余子式。

C11,C12,C13和C14，那么A是一个4乘4矩阵。
每一个代数余子式将涉及到计算一个3乘3矩阵的行列式。
也就是说看起来对于第二部分，我们需要计算四个3乘3矩阵的行列式。
我们下面把它们分别写出来。先来看C11，C11是这个位置代数余子式。
那么我们要计算的就是这个剩余位置的3乘3矩阵的行列式。

把它写在这里。C11等于 如下矩阵的行列式 6， 7， 8， 0， 9， 10， 0， 11， 12，
你要用什么方法来求解这个3乘3
矩阵的代数行列式呢？你当然可以用行列式的定义式，
也就是对于这个3乘3矩阵写出类似于这样的一个求和公式。
但是如果你用这种方法的话，你需要计算3的
阶乘，像乘积，也就是说你需要计算6个乘积。
有没有更为快捷的办法呢？你可以注意到
这个3乘3矩阵的第一列只有这个位置的元素非0。
那么也就是说我们应该利用代数余子式的方法来计算这个矩阵的行列式。
我们对第一列进行展开。 那么结果应该是6乘以它的代数余子式。
那么它代数余子式就是剩余2乘2矩阵的行列式。这样
就很简单，也就应该是9乘以12减去 10乘以11，计算这个式子的话
108减去110得负2， 再乘以6 等于负12， 这就是C11。 下面来看C12，
同样C12也是一个3乘3矩阵的 行列式， 我们把这个
矩阵写在这里， 应该是5， 7， 8， 0 ， 9， 10 ， 0， 11， 12，
不要忘记现在我们看到的是1， 2
位置代数余子式， 所以在这个行列式之前我还需要一个负号。
这也就是负1的1加2次方等于负1。
同样的这个3乘3矩阵的第一列也只有一个非0元素。 对它进行展开就等于负5乘以
同样的这个2乘2矩阵的行列式， 也就是9乘以12
减去10乘以11， 这一次应该等于10， 这就是C12。我们继续
C13等于如下矩阵的行列式： 5， 6 ， 8， 0， 0， 10， 0 ， 0， 12，
你当然可以同样的用对第一列展开的方法求这个3乘3矩阵的行列式。

如果你那样做的话， 结果应为0。 但是其实你应该可以直接看出
这个矩阵行列式应为0， 并不需要任何计算。 因为很显然这两列是线性相关的。
第二列就等于第一列乘以5分之6， 也就是说这实际上是一个奇异的矩阵。
那么奇异矩阵的行列式均为0， 所以立即你可以写出C13等于0。 最后来看C14，
把剩余部分矩阵抄下来， 5， 6， 7， 0 ， 0 ， 9， 0， 0， 11，
这也是一个奇异矩阵， 这两列线性相关， 那么这个结果也应该为0。
当然通常情况下， 我需要一个负1在这里， 但是这里负1乘以0还是等于0。
好， 这就是A的第一行的代数余子式， 你可以看到， 如果你观察到
这些矩阵的特点的话， 这样的计算其实是并不花时间的。
好， 下面你可以继续做第三部分， 但是我们注意到
有了第二部分的结果， 我们可以很容易地检验第一部分答案是否正确。
那么如何来检验呢？ 我们现在有A的第一列的代数余子式。
同样我们还知道A的行列式可以由A的第一列 与其代数余子式的内积给出。
我们就来看一下它的内积是不是等于我们在第一部分中得到的答案。

下面我把它写在这里。 矩阵A的行列式还等于A的
第一列与代数余子式内积， 就是a11乘以C11加上a12
乘以C12， 那么后面两项都为0了。
实际上我们就是需要计算这两项的和， a11等于1， C11等于负12，
A12等于2， C12等于10， 你可以看到这个结果确实为8。
所以至少第二部分与第一部分答案是一致的。 下面我们来进行对第三题的求解。
第三题是要求你写出A的逆矩阵的第一列。
看起来我们又要求解很多3乘3矩阵的行列式，
但是正如很多经过仔细设计的考试习题一样，
第三问的答案其实可以由第一问与第二问答案直接给出。
我们先来回忆一下A的逆矩阵的公式是什么？ A的逆矩阵等于1除以A的行列式
再乘以一个矩阵C的转置， 这个矩阵C的元素就由A的代数余子式给出。
如果我们想要找到A的逆矩阵的第一列的话 这实际上就等于这个常数
乘以矩阵C的转置的第一列， 那么也就应该是矩阵C的第一行 再转置，
矩阵A的行列式由第一 问答案得出， 也就是八分之一。

C的第一行由第二问的答案给出， 咱们抄下来， 就是负12， 10， 0， 0，
这样你就得到了A的逆矩阵的第一列。 好， 我们已经完成了全部三个部分的求解。
你的答案正确吗？ 在结束之前， 我希望提醒你两点：
第一点是你可以看出， 这个考试主要是
在测验你对于矩阵行列式公式， 定义公式的应用。
我们在之前的习题课中练习了利用消元
法与代数余子式方法的结合来求解矩阵的行列式。
但是我们不应该忘记这个公式。
在很多情况下， 这个公式反而可以给出比较简便的解法。
正如我们看到的这个矩阵A。 第二点是我希望在求解过程中， 你可以将你的
求解过程列出如下， 如果你可以比较清晰有条理地列出求解过程，
一方面这样便于检验你的答案， 另外一方面即使你最后答案
不正确的话， 你也可以通过这些过程得到部分的分数。
好， 我今天就讲到这里， 祝大家考试有好运， 谢谢。 Funding for this video was provided by the Lord Foundation. To help OCW continue to provide free and open acceess to MIT courses, please make a donation at ocw.mit.edu/donate